INSTITUTO SUPERIOR DE COMPUTACIÓN, S.C.



DIVISIÓN BACHILLERATO

MATERIAL DIDÁCTICO PARA

CLASE DE

MATEMÁTICAS V

**ÍNDICE**

Presentación............................................................................................................ 3

UNIDAD I. La integral como área bajo una curva.................................................... 5

1.1. Integral.............................................................................................................. 5

1.1.1. Áreas por aproximación de límites de sumas................................................ 7

1.1.2. Suma de Riemann......................................................................................... 8

1.1.3. Integral definida............................................................................................. 9

1.1.4. Teorema fundamental del cálculo................................................................ 13

1.1.5. Antiderivadas............................................................................................... 15

1.1.6. Cálculo del área de regiones comprendidas entre dos curvas.................... 16

Ejercicios de tarea................................................................................................. 18

UNIDAD II. La integral indefinida........................................................................... 23

2.1. Integral indefinida............................................................................................ 24

2.1.1. Antiderivada................................................................................................. 24

2.1.2. Reglas básicas de integración..................................................................... 25

Ejercicios de tarea................................................................................................. 27

UNIDAD III. Métodos de integración...................................................................... 29

3.1. Métodos de integración................................................................................... 31

3.1.1. Método de Integración por sustitución……………………………………....... 31

3.1.2. Método de integración por partes................................................................ 33

3.1.3. Aplicación de los métodos de integración por sustitución y de integración por partes en funciones algebraicas, potencias y funciones trigonométricas………... 35

Ejercicios de tarea................................................................................................. 36

UNIDAD IV. Aplicaciones de la integral................................................................. 41

4.1. Cálculo de volúmenes..................................................................................... 42

4.2. Aplicaciones del Cálculo Integral en la Geometría......................................... 43

4.3. Aplicación del Cálculo Integral en la Física.................................................... 46

4.4. Determinación del trabajo físico realizado por una fuerza.............................. 47

Ejercicios de tarea................................................................................................. 47

**PRESENTACIÓN**

Al inicio del curso de Cálculo Diferencial se introdujo el concepto de la derivada con el auxilio de su representación geométrica como la pendiente a una curva. En la presente curso comenzaremos también, de una manera intuitiva, a comprender qué es la integral al interpretarla como el área bajo la curva representativa de una función. De manera previa se estudiará la notación sigma o sumatoria para aplicarlo a la medición de áreas por aproximación de límites de sumas. Una manera muy apropiada de lograrlo se conoce como suma de Riemann. Una vez entendido lo anterior se podrá entender y aplicar la integral definida además de evaluar las llamadas antiderivadas que son precisamente las operaciones inversas a la diferenciación.

Uno de los primeros logros del cálculo, fue predecir la posición futura de un objeto, a partir de una ubicación conocida y la función que representa su velocidad. Además hemos podido, en muchas ocasiones encontrado una función a partir de valores conocidos y una fórmula para su razón de cambio. En nuestros días, calcular la rapidez que necesita un cohete en cierto punto para poder salir del campo gravitacional de la Tierra o predecir el tiempo de vida útil de un objeto a partir de su nivel de actividad y su razón de decrecimiento, son procesos rutinarios, gracias al cálculo, mediante el uso de las derivadas. De aquí, podemos concluir que el problema de esta es, que si conocemos el recorrido de un punto móvil, podemos calcular su velocidad y adicionalmente si tenemos una curva podemos hallar la pendiente de la recta tangente en cada uno de sus puntos.

Esto, es lo que hemos estudiado en la parte del cálculo infinitesimal que denominan como “Cálculo Diferencial”. Ahora nos centraremos en otra parte de este, que denominan “Cálculo Integral”.

El estudio de esta materia requiere, por tu parte, que estés muy atento a las explicaciones que proporciona el autor del texto que estaremos usando y, por otra parte, que hagas el esfuerzo de resolver por cuenta propia, si es necesario con la ayuda del asesor, los problemas que te sugeriremos y para los cuales hemos presentado, en algunos casos, no solo las soluciones, sino también los desarrollos con las anotaciones que consideramos pertinentes para tu mejor comprensión del proceso.

Aquí se sentaran las bases del cálculo integral relacionándolo de manera esencial con el cálculo diferencial a través del teorema fundamental del cálculo. Estudiaremos a la Integral como suma y a la vez, como la determinación del área que, en un intervalo específico, se desarrolla bajo la curva representativa de una función.

Aprenderemos algunas de las reglas básicas de la integración para poder resolver algunos problemas elementales. Los métodos de integración por partes y el de sustitución se dominaran y se aplicará en la integración de funciones algebraicas, potencias y funciones trigonométricas.

También se estudiarán algunas de las aplicaciones de la integral, en primer lugar calculando volúmenes de figuras regulares o irregulares y después en situaciones tan variadas como la determinación del centro de masa de un objeto, la velocidad del flujo sanguíneo, la presión hidrostática sobre la cortina de una presa, el cálculo del trabajo efectuado en un sistema físico, etcétera.

*MCIQ. Azor Aguilar Cortés.*

UNIDAD I

LA INTEGRAL COMO ÁREA BAJO UNA CURVA

**Objetivo de la Unidad:**

***Aplicar la integral definida, a través de la aproximación sucesiva de las áreas de regiones en el plano y la antiderivada de funciones polinomiales, para resolver problemas sencillos en las diferentes áreas del conocimiento.***

Al terminar el estudio de la presente unidad, deberás estar capacitado para poder calcular áreas de regiones comprendidas entre dos curvas de tal suerte que enfrentes con éxito la resolución de algunos problemas sencillos.

**1.1. INTEGRAL**

**Objetivo:**

*Determinar la antiderivada de funciones polinomiales, a través del análisis de la relación entre la antiderivada y el área bajo la curva, para la solución de problemas sencillos.*

En la búsqueda de áreas y la evaluación de las integrales a menudo nos encontramos con muchas cantidades que deben sumarse al mismo tiempo. Una forma cómoda de escribir las cantidades es utilizando la letra griega (sigma) y se llama **notación sigma.**

|  |
| --- |
| Definición:  Si |

Con la notación de la función. La definición anterior puede ser escrita como:

Así, el símbolo indica un resumen en el que la letra i (llamado el índice de la suma) toma los valores m, m +1,..., n. Otras letras se pueden utilizar como índice de la suma.

|  |
| --- |
| Teorema: Si c es cualquier constante (es decir, no depende de i), entonces  (a)  (b)  (c) |

Para ver por qué estas normas se cumplen, todo lo que tenemos que hacer es escribir las dos partes en forma ampliada. Desarróllalas en tu cuaderno con la ayuda de tu asesor.

**Ejemplos:**

Observa que el término inicial es i=1 y el término final es i = 6, por lo que al sustituir en la expresión tenemos la solución.

En ocasiones tendremos que realizar el proceso inverso al expresar una suma en forma de sumatoria, los siguientes ejemplos intentan aclarar cómo se procede:

Por ejemplo, en la siguiente suma: puedes darte cuenta de que el término inicial es 3, por tanto i = 3 y el término final es 7. Por otro lado la función en la cual se insertarán los términos es la raíz cuadrada, por ello la suma puede expresarse como sigue:

Ahora consideremos la siguiente suma: el término inicial es i = 1 y el término final es i = 19, la variación que se presenta es que el denominador es mayor por una unidad que el numerador, por ello, una posible representación de la sumatoria es:

|  |
| --- |
| Teorema: Si c es cualquier constante (es decir, no depende de i), entonces  (a) (b)    (c) (d)  (e) (f) |

**1.1.1 Aproximación por límites de sumas**

**Primer ejemplo:** Empleando la aproximación por límite de sumas, determina el valor del área bajo la curva de la siguiente función:

Intervalo:

Puntos de partición:

Punto x i\* dentro del i-ésimo intervalo: extremo izquierdo

En primer lugar hacemos:

y calculamos D de la siguiente manera:

Por consiguiente, la norma de la partición se determina como sigue:

*máx.* =1

Sustituyendo y procediendo a calcular la suma, tenemos:

**1.1.2. Suma de Riemann**

1. Asigna valores entre 0 y 1 para la función , elabora la tabla correspondiente y en papel cuadriculado traza la curva que representa a la función (te sugerimos que para la escala de cada eje, le asignes a cada cuadrito el valor de 0.05 unidades). Ahora intenta una aproximación a la medida del área bajo la curva dentro del intervalo marcado, contando los cuadritos que quedan dentro de dicho espacio (si seguiste la sugerencia, cada cuadrito tendrá como superficie 0.0025 unidades).
2. ¿Qué tanto te pudiste aproximar?
3. ¿Qué dificultades tuviste para lograr que tu estimación fuese lo más exacta posible?
4. ¿Qué tanto se acercó al resultado de la suma de Riemann?
5. Anota en tu cuaderno los conceptos de partición de un intervalo, norma de la partición y el significado de . Explica, con tus palabras, cuál es la repercusión en la medición del área bajo la curva al considerar a en el extremo derecho, en el extremo izquierdo o en el punto medio del subintervalo después responde:
6. ¿El área estimada será más grande que el área real?, ¿o más pequeña?, Justifica tus respuestas.
7. Escribe en tu cuaderno tu apreciación en torno a que es lo que sucederá con el ancho de los rectángulos de aproximación cuando la norma de la partición (|| P ||) tiende a cero.

**1.1.3. Integral definida**

Vimos en la sección anterior que el límite de la función:

Surgen cuando se calcula un área. Resulta que este mismo tipo de límite se produce en una amplia variedad de situaciones, incluso cuando f no es necesariamente una función positiva. Por lo tanto, daremos a este tipo de límite un nombre y una la notación especial.

|  |
| --- |
| Definición de una integral definida: Si f es una función definida en un intervalo cerrado con puntos de partición , donde:  Elija puntos en un y dejar y .  Entonces la integral definida en f de a hacia b es:  si este límite existe. Si el límite no existe, entonces f se dice integrable en el intervalo |

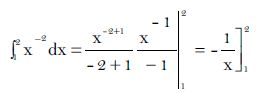
1. Anota en tu cuaderno la definición de una integral definida y explica la relación entre ella y la Suma de Riemann.
2. Completa el siguiente cuadro:

|  |  |
| --- | --- |
| **ELEMENTOS DE LA INTEGRAL DEFINIDA** | |
| **Elemento** | **Símbolo representativo** |
| Integral |  |
| Integrando |  |
| Límite superior |  |
| Límite inferior |  |

1. Responde en tu cuaderno: ¿La integral siempre representa a un área? Justifica tu respuesta.
2. Escribe los criterios para considerar a una función .integrable.
3. Explica las ventajas de seguir la regla del punto medio para la medición del área bajo la curva.
4. Copia en tu cuaderno y también en una ficha de trabajo las propiedades de la integral.
5. Revisa los siguientes ejemplos para la evaluación de integrales definidas poniendo especial atención en los procedimientos:

**Ejemplo 1.** Evalúa la integral dentro de los límites que se establecen:

En primer lugar evaluamos la integral y marcamos los límites dentro de los cuales se está calculando su valor.



Sustituimos los valores en la expresión encontrada.

Y este es el resultado final.

**Ejemplo 2.**

Recordemos que los coeficientes 5, 4 y 3 están antes de una variable (en este caso , y salen de la integral como constante (cte.).

Ahora resolvemos las integrales:

Limitando nos queda:

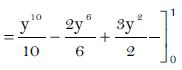
C:\Users\Public\Pictures\Sample Pictures\2.JPG

Sustituyen los valores de límites:

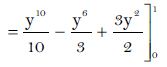
Resolviendo:

**Ejemplo 3.**

Resolviendo la integral:



Simplificando:

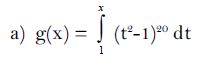


Sustituyendo límites:

**1.1.4. Teorema fundamental del cálculo**

|  |
| --- |
| **El teorema fundamental del cálculo:** Si *f* es continua en , entonces la función *g* es definida por:  es continua en ​​, y diferenciable en y |

**Ejemplo 3.** 1. Aplicando la primera parte del teorema fundamental del Cálculo, determina la derivada de las siguientes funciones:



C:\Users\Public\Pictures\Sample Pictures\7.JPGC:\Users\Public\Pictures\Sample Pictures\6.JPG

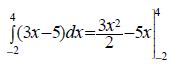
Como es continua, tenemos que es la solución.

b) puesto que es continua la solución es C:\Users\Public\Pictures\Sample Pictures\8.JPG

**Ejemplo 2.** Usa la segunda parte del teorema fundamental del Cálculo y evalúa la integral o define si no existe.

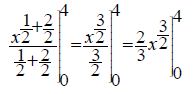
a)

Aplicando las fórmulas para integración inmediata y evaluando tenemos:



b)

Resolviendo nos queda:



Evaluando:

c)

**Ejemplo 3.** La función de velocidad de un punto material que se mueve a lo largo de una recta está dada por la expresión:

Calcula:

a) el desplazamiento

b) la distancia recorrida en el intervalo

**Solución:**

Para determinar el desplazamiento del punto material integraremos la función de velocidad dentro del intervalo marcado:

Después de observar lo anterior, anota por lo menos 2 ejemplos de situaciones en los que se aplica el teorema fundamental del cálculo.

**1.1.5 Antiderivadas**

Seguramente, después del estudio de las secciones anteriores, habrás podido darte cuenta de que la integración también puede recibir el nombre de antiderivación puesto que es la operación inversa a la diferenciación.

1. Escribe en tu cuaderno la definición de antiderivada.
2. Copia tanto en tu cuaderno como en una ficha de trabajo la tabla de fórmulas de anti diferenciación.
3. Explica por qué razón se agrega una constante al calcular la antiderivada.
4. Explica cuál es el significado geométrico de asignar valores diferentes a la constante que resulta al antiderivar.

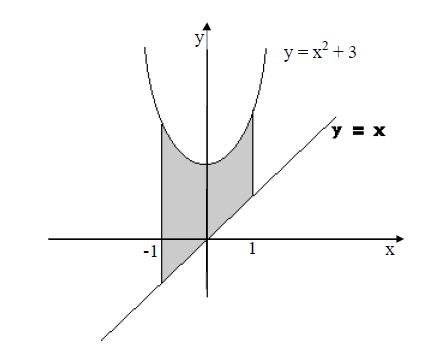
**1.1.6. Cálculo del área de regiones comprendidas entre dos curvas**

Una aplicación muy importante del cálculo integral es la determinación del área comprendida entre dos curvas. Este proceso, resuelto en forma aritmética resulta difícil y en ocasiones imposible, es entonces cuando la integración se convierte en herramienta inapreciable para lograr la solución. Para abordar este tema tan importante, realiza la lectura de las páginas 380 a la 385 del libro de Stewart, James. Op. cit. y con base en la información proporcionada, realiza las siguientes actividades:

1. Revisa atentamente cada ejercicio propuesto en el texto y elabora, por tu cuenta, la tabla correspondiente asignándole valores, dentro del intervalo propuesto, a la variable x. Acto seguido, traza la gráfica correspondiente en papel cuadriculado y evalúa la integral definida dentro de los límites marcados.
2. Anota en tu cuaderno tu explicación de lo que cambia en el procedimiento cuando:
3. f(x) es a veces mayor y a veces menor que g(x)
4. resulta mejor cambiar el intervalo del eje XX´ al eje YY´.

**Ejemplo 1.** Calcula el área de la región sombreada.

La curva que representa a la función y = x2 + 3 está en una posición más alta que la recta que representa a la función y = x. Por otro lado, el área sombreada se encuentra en el intervalo de -1 a 1, por lo que ya se puede intuir que el cálculo del área sombreada se podrá hacer de la siguiente manera:



Área de la región sombreada en el intervalo de -1 a 1

Integrando resulta:

Sustituimos y calculamos con los valores indicados de -1 y 1, de lo cual tenemos:

El área buscada es igual a

Para poder integrar, debemos tomar como variable independiente a y, por lo tanto, las funciones se escriben de la forma siguiente:

y = x + 5 x = y - 5 x =

Escribimos las integrales correspondientes:

Realizando la integración se tiene:

**EJERCICIOS DE TAREA**

Te proponemos que ahora intentes resolver los siguientes problemas, esto te permitirá medir tu avance y, al mismo tiempo, detectar tus deficiencias en aquellos contenidos en los cuales no has logrado un dominio suficiente. Te recomendamos que si tienes dudas vuelvas sobre el texto y consultes a tu asesor.

**Áreas por aproximación de límites de sumas**

a) Desarrolla las siguientes sumas:

b) Expresa las siguientes sumas en notación de sumatoria:

**Desarrollando lo Aprendido**

**Suma de Riemann**

**Ejercicio A**

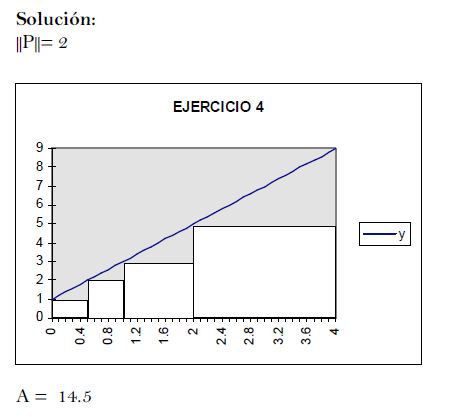
**Datos:**

sea la función,

los puntos de partición:

el intervalo:

Encontrar: la norma de la partición ||P||, la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación y trazar la gráfica correspondiente.



**Ejercicio B**

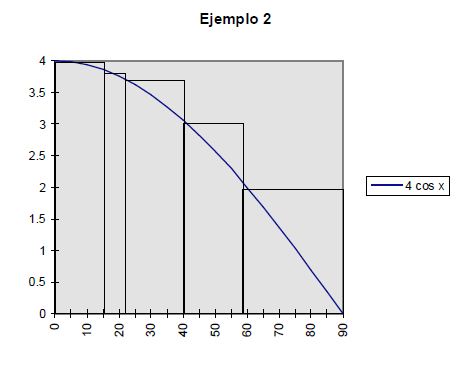
**Datos:**

sea la función ,

los puntos de partición:

el intervalo:

Encontrar: la norma de la partición ||P||, la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación y trazar la gráfica correspondiente.



**Integral definida**

Evalúa las siguientes integrales:

**Determinación del área entre dos curvas**

Ejercicio 1: Determina el área de la región limitada por la curva el eje x y las rectas y . **Solución:**

Ejercicio 2: Determina el área de la región limitada por la curva y las rectas x y **Solución**: = 1

Ejercicio 3: Determina el área de la región limitada por las curvas , y las rectas , **Solución:**

UNIDAD II

LA INTEGRAL COMO ÁREA BAJO UNA CURVA

**Objetivo de la Unidad:**

***Aplicar el concepto de integral, a través del empleo de las antiderivadas y su interpretación para la resolución de problemas sencillos en las diferentes áreas del conocimiento.***

En el capítulo anterior se estudiaron los fundamentos del cálculo integral y a la integral definida, ahora dedicaremos nuestra atención de forma especial a la integral indefinida. Seguramente habrás entendido que existe una notable diferencia entre ambas integrales, puesto que por un lado, la integral definida es en realidad un número, mientras que la integral indefinida es una función.

Un problema matemático frecuente es el encontrar, a partir de la derivada, la función original correspondiente. Las antiderivadas nos permiten lograrlo mediante una serie de procedimientos algebraicos y fórmulas establecidas que simplifican el proceso, razón por la cual se estudian en   
primer lugar. La notación de integral maneja una serie de elementos que es necesario conocer con detenimiento y el conocer las reglas básicas de integración nos prepara para aplicadas en la resolución de algunos problemas sencillos.

Los ejercicios que se resuelven dentro de la guía te ayudarán, así lo esperamos, para que comprendas tanto el procedimiento como el sentido matemático y geométrico de la integral definida. Procura seguirlos con atención e irlos resolviendo simultáneamente en tu cuaderno de notas.

*MCIQ. Azor Aguilar Cortés*

**2.1 INTEGRAL INDEFINIDA**

**Objetivo:**

Determinar la antiderivada de funciones sencillas mediante el análisis de la relación entre la antiderivada y la integral definida, para la resolución de problemas.

Debido a la relación propuesta por teorema fundamental entre primitivas e integrales, la notación , es tradicionalmente, utilizado para una antiderivada de *f* también se le llama una integral indefinida.

**2. 1. 1 Antiderivada**

Sabemos cómo resolver el problema de derivadas de: dada una función, encontrar su derivada. Sin embargo, muchos problemas en matemáticas y sus aplicaciones nos obligan a resolver el problema inverso de la derivación: dada una función *f*, encontrar una función *F* cuya derivada es *f*. Si una función *F* existe, se llama una antiderivada de *f*.

|  |
| --- |
| Definición: Una función *F* es llamada antiderivada de *f* en un intervalo *I* si para toda *x* en *I*. |

Tabla: Fórmulas antiderivadas

|  |  |
| --- | --- |
| FUNCIÓN | ANTIDERIVADA |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Determina la antiderivada más general de la función

a)

Empleando las fórmulas de la tabla (fórmulas de la primera y tercera posición), tenemos que:

Se comprueba que la antiderivada es correcta puesto que al derivar F(x) obtenemos f(x).

b)

**2.1.2. Reglas básicas de integración**

La tabla de integrales indefinidas muestra que se te ayudara a resolver los problemas, cópialo en tu libreta.

1. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e1.gif
2. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e2.gif
3. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e3.gif
4. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e4.gif
5. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e5.gif
6. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e6.gif
7. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e7.gif
8. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e8.gif
9. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e9.gif
10. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e10.gif
11. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e11.gif
12. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e12.gif
13. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/antider.2/e13.gif

Revisa con atención los ejercicios que desarrollamos a continuación y que te presentamos para que observes la aplicación de la tabla de integrales indefinidas.

a) Integra:

b) Integra:

c) Integra:

d) Integra:

e) Integra:

f) Integra:

Aplica lo que aprendiste al estudiar este capítulo resolviendo los ejercicios que te proponemos. Compara tu respuesta con la solución y si tienes dudas consulta nuevamente el texto y a tu asesor.

**Tarea de Integrales indefinidas.**

Evalúa las siguientes integrales:



UNIDAD III

LA INTEGRAL COMO ÁREA BAJO UNA CURVA

**Objetivo de la Unidad:**

***Aplicar la integral definida, a través de la aproximación sucesiva de las áreas de regiones en el plano y la antiderivada de funciones polinomiales, para resolver problemas sencillos en las diferentes áreas del conocimiento.***

Es un hecho que, a diferencia de otras operaciones matemáticas, la integración no se puede reducir a la mera aplicación de una serie de fórmulas. Más aún, se podría afirmar que cada integral tiene su propio procedimiento para ser resuelta. Sin embargo, los métodos de integración que estudiaremos en esta unidad nos proveerán de elementos suficientes para poder resolver un gran número de casos en los que con toda probabilidad tendríamos grandes dificultades.

Los mencionados métodos de integración se aplicarán en la última parte de la unidad, para resolver problemas sencillos en diversas áreas. Un ejemplo tomado de la medicina podría ser el cálculo del volumen de aire respirado por una persona durante un ciclo respiratorio completo desde la inhalación hasta la exhalación. El débito del flujo del aire hacia los pulmones puede ser representado por una función de la forma , esto quiere decir que al realizar la integración seríamos capaces de saber si la capacidad pulmonar de una persona en particular, corresponde al volumen de aire inhalado por la misma y de esta forma determinar el estado de salud que presenta. Otra situación en la que se aplica la integración es en el cálculo de la producción de un determinado artículo. Es interesante saber que el proceso puede ser representado por una función y la integración de ella nos permitirá saber con precisión cuándo se ha llegado al punto óptimo y cuál debiera ser el total de artículos producidos en una línea de producción.

La integración se aplica, aunque parezca poco creíble, a fenómenos estudiados por la ornitología (la ciencia que estudia a las aves, especialmente a los pájaros). Se afirma que algunas especies de aves migratorias tienden a evitar volar sobre grandes extensiones de agua durante el día.

La razón parece ser que el vuelo en tal situación requiere un mayor gasto de energía debido a que durante el día el aire sube de la tierra y desciende sobre el agua. Ahora bien, de una manera instintiva las aves tienden a economizar su energía para poder volar mayores distancias y esto, también puede ser representado por una función que, una vez integrada, nos permitirá conocer la distancia máxima que un ave puede recorrer en un determinado tiempo, el trabajo realizado al volar sobre tierra o sobre el agua, etcétera.

Estos comentarios pretenden que percibas al cálculo integral y a los métodos que se van a estudiar, como herramientas que se pueden utilizar no sólo como materia de examen sino también en el análisis de muchos fenómenos de tu propia vida y de diversas áreas del conocimiento. Así pues, te invitamos a seguir esforzándote en el estudio del cálculo integral.

*MCIQ. Azor Aguilar Cortés*

**3.1 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN**

**Objetivo:**

Calcular integrales no inmediatas o por transformaciones algebraicas sencillas, aplicando los métodos más usuales de integración por partes y sustitución trigonométrica, para la resolución de problemas teórico-prácticos.

**3.1.1. Método de Integración por sustitución**

El teorema de fundamental de cálculo reduce el problema de la integración del problema de antiderivación. Pero las fórmulas antiderivación no son suficiente para evaluar integrales, tales como:

Ecuación 1:

En estos casos, la tarea se simplifica mediante el cambio de la variable *x* para una nueva variable. Supongamos que sea *U* la cantidad en la raíz de la ecuación 1, . Entonces el diferencial de Tenga en cuenta que si el dx en la notación para una integral se interpretara como un diferencial, entonces el diferencial se produciría en (1) es así, formalmente, sin justificar nuestros cálculos, podríamos escribir:

Ecuación 2:

Pero ahora podemos comprobar que hace que la respuesta correcta utilizando la regla de la cadena para diferenciar la función en el lado derecho de la ecuación 2.

En general, este método funciona si tenemos un integrante de la forma . Observe que si , después:

Ecuación 3:

porque, por la regla de la cadena,

Si hacemos el "cambio de variable" o "sustitución", entonces la ecuación 3 estará dada por:

o escribiendo , obtenderemos:

Por lo tanto hemos demostrado la siguiente regla:

|  |
| --- |
| La regla de sustitución: Si es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I y f es continua en I, tenemos: |

Observe que la regla de sustitución para la integración se comprobó mediante la regla de la cadena para la diferenciación.

Ejemplo 1. Evalúa la siguiente integral efectuando la sustitución prescrita.

Si entonces

Por tanto la integral puede escribirse como sigue:

Al aplicar las reglas de integración resulta:

Sustituyendo la función original tenemos:

**Ejemplo 2.** Evalúa la siguiente integral efectuando la sustitución indicada.

Si entonces y

Al sustituir, la integral original se transforma de la siguiente manera:

Y aplicando las reglas de integración tenemos:

Insertamos en lugar de u a la función original y la solución es:

**3.1.2. Método de integración por partes**

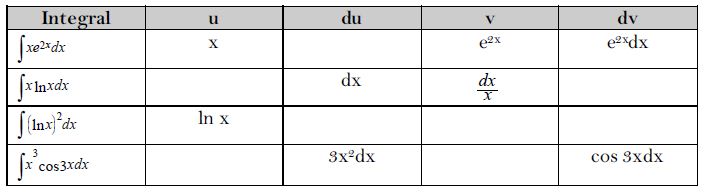
Todas las reglas de diferenciación tienen una regla de integración correspondiente. Por ejemplo, la regla de sustitución para la integración corresponde a la regla de la cadena para la diferenciación. La regla que se corresponde con la regla del producto para la diferenciación se llama la regla para la integración por partes.

La regla del producto que si *f* y *g*  son funciones diferenciables, entonces:

En la notación para las integrales indefinidas esta ecuación se convierte en:

O

Revisa atentamente las integrales de la primera columna y completa lo que falta en el siguiente cuadro:



1. Una vez que hayas completado el cuadro, sustituye los elementos en la fórmula de integración para cada caso.
2. Después de sustituir en la fórmula de integración por partes, terminemos la solución para cada caso.

**3.1.3. Aplicación de los métodos de integración por sustitución y de integración por partes en funciones algebraicas, potencias y funciones trigonométricas**

Los métodos de integración por partes y de sustitución muestran su eficacia cuando se intenta aplicarlos a la resolución de expresiones más complejas. En tales casos no basta tan solo aplicar las fórmulas de integración directa sino tener la suficiente habilidad para lograr la integración a través de los referidos métodos. En esta sección tendremos la oportunidad de tener un acercamiento a su aplicación en funciones algebraicas, potencias y funciones trigonométricas.

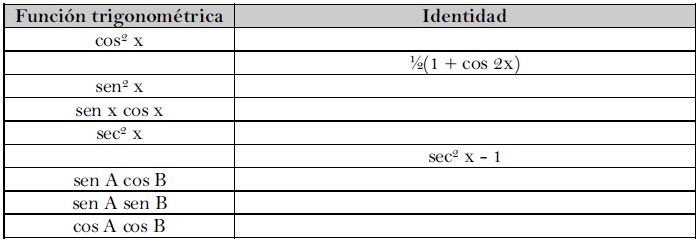
En esta sección se utiliza identidades trigonométricas para integrar ciertas combinaciones de funciones trigonométricas. Empecemos con las relaciones de seno y coseno.

Evaluemos:

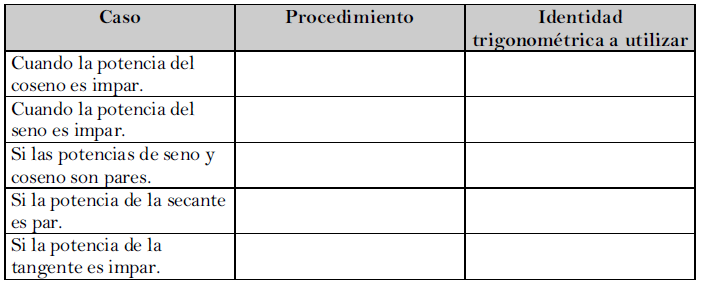
aquí la identidad adecuada es aquí escribiremos:

Es útil contar con el factor adicional de porque si hacemos la sustitución de , entonces tenemos , así:

Busca las identidades trigonométricas correspondientes y completa el siguiente cuadro:



2. A continuación anota los procedimientos y las identidades trigonométricas para evaluar las integrales en los siguientes casos:

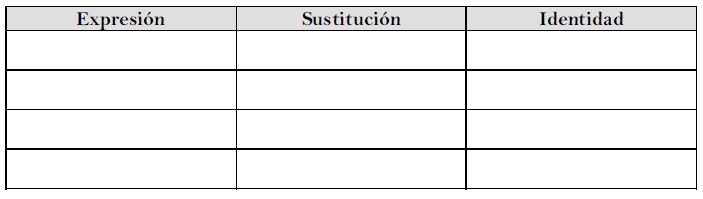
****

**3.1.4 Integración por sustitución trigonométrica**

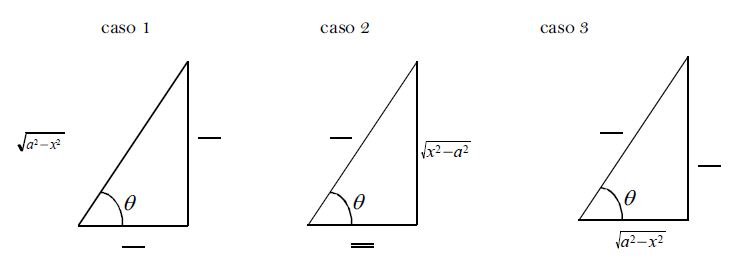
Encontrar el área de un círculo o una elipse, un integrante de la forma surgen, donde . Si se tratara de , la sustitución sería eficaz, pero, tal y como está, es más difícil. Si cambiamos la variable de x a 0 por la sustitución , a continuación la identidad nos permite deshacerse de los signo de la raíz, porque:

En general se puede hacer una sustitución de la nnnn formulario mediante la regla de sustitución inversa.

Investiga y Copia la tabla de sustituciones trigonométricas:



Tomando en cuenta que estas sustituciones trigonométricas se basan en el teorema de Pitágoras coloca las letras x y a donde correspondan:



En función de los casos de la parte de arriba complementa:

1.- Si en el caso 1 relacionamos x y a

¿A qué funciones trigonométricas se refieren?

¿Cómo se puede expresar x en función de a y de q?

2.- De acuerdo al caso 2, relacionando x y a tenemos que las funciones trigonométricas son:

Expresando a x en función de a y de q

3.- Para el caso 3, las funciones trigonométricas son:

Y tenemos que x expresado en función de a y q queda así:

Evaluando:

Sea , donde . Así que y

Nota que porque . por tanto, la regla de sustitución inversa da:

**3.1.5 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales**

Para ilustrar el método, tenga en cuenta que al tomar las fracciones y a un común denominador, obtenemos:

Si ahora invertimos el procedimiento para ver la forma de integrar la función en el lado derecho de esta ecuación:

En este capítulo revisamos los métodos de integración, ahora aplica lo aprendido en la resolución de los siguientes ejercicios. Compara tu solución con las respuestas. Si tienes dudas te recomendamos volver sobre el texto y consultar a tu asesor.

**Ahora resuelve los siguientes ejercicios:**

**Integración por sustitución**

**Integración por partes**

**Integración por sustitución trigonométrica**

**Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales**

UNIDAD IV

LA INTEGRAL COMO ÁREA BAJO UNA CURVA

**Objetivo de la Unidad:**

***Aplicar la integral definida, a través de la aproximación sucesiva de las áreas de regiones en el plano y la antiderivada de funciones polinomiales, para resolver problemas sencillos en las diferentes áreas del conocimiento.***

Preguntas que frecuentemente se hacen los estudiantes de bachillerato al abordar el Cálculo y son: ¿y para qué me va a servir estudiar esto?, ¿en qué lo voy a aplicar? Aparentemente el Cálculo no es más que una asignatura que se tiene que cursar porque está en el Plan de Estudios y por la que quiérase que no habrán de transitar con mayor o menor éxito.

Sorprendentemente, sin embargo, el Cálculo se aplica en el análisis de un sinnúmero de fenómenos. El estudio de la presente Unidad nos hará aplicar lo que ya aprendimos en el curso, a situaciones tales como la determinación de volúmenes de sólidos de revolución, es decir, de aquellos sólidos que son generados al hacer girar una curva o intersección de curvas en torno a un eje determinado. Aprenderemos también a calcular la superficie, la cáscara de un sólido.

En el campo de la Física aplicaremos nuestros conocimientos del Cálculo para ubicar el llamado centroide o centro de masa de un cuerpo, es decir, el punto en el cual se considera concentrada la masa de un cuerpo y a partir del cual se puede equilibrar el cuerpo mencionado. Procederemos a calcular el trabajo desarrollado al estirar un resorte, o al vaciar un tanque.

En el campo de la medicina aplicaremos el Cálculo para determinar el flujo sanguíneo y en el campo de la economía tendremos oportunidad de conocer, a través del Cálculo, el valor presente de una corriente de ingresos.

Lo anterior no es más que una pequeña muestra de los campos en los que se aplica nuestra asignatura. Es probable que según avances en tus estudios y en tu vida particular encuentres oportunidades para aplicar el Cálculo Integral de manera que puedas comprender más profundamente lo que sucede en nuestro mundo. *MCIQ. Azor Aguilar Cortés*

**4.1. Cálculo de volúmenes**

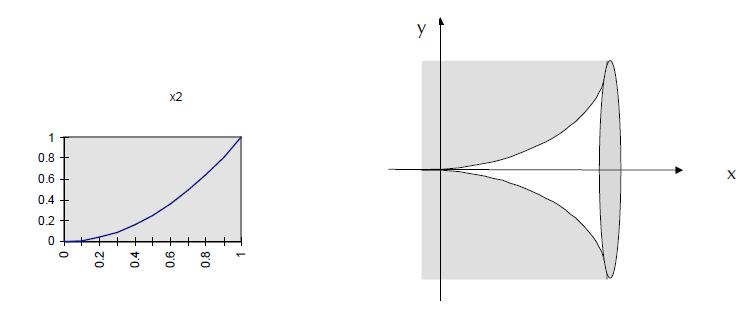
**Objetivo:**

*Determinar área y volumen a través de la aplicación de la integral definida para la resolución de problemas geométricos, biológicos, físicos, en la economía y probabilidad.*

**Ejemplo 1.** Determina el volumen generado por la curva , dentro de los límites x=1, y= 0 al girar alrededor del eje x.

En primer lugar calculamos el área del .disco. i-ésimo tomando a x2 como radio y aplicando la fórmula:

Para ayudarnos a visualizar la figura, elaboremos la gráfica y un diagrama del sólido de revolución que se genera al girar en torno al eje x:



Y después determinamos el volumen aplicando la fórmula:

unidades cúbicas (por tratarse de un volumen).

**Ejemplo 2**. Determina el volumen del sólido de revolución generado por la función , acotada por las rectas x=4, y = 0 al girar alrededor del eje x.

Calculamos el área en primer lugar y posteriormente aplicamos la fórmula para determinar el volumen:

unidades cúbicas.

**4.2. Aplicaciones del cálculo integral en la geometría**

**Ejemplo 1.** Calcula el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje x.

Hacemos

Aplicamos la fórmula:

Observe que:

Sustituyendo queda:

Ahora hacemos:

Realizamos la sustitución cambiando los límites, para ello aplicamos los límites iniciales en:

nuevo límite superior: 4 (9) + 1 = 37

nuevo límite inferior: 4 (4) + 1 = 17

La integral se escribe ahora:

Y al realizar la integración se tiene:

Porque:

Al calcular con los límites tenemos la solución:

**Ejemplo 2.** Calcula el área de la superficie obtenida al hacer girar sobre el eje y la curva en el intervalo

Puesto que:

Aplicando la fórmula:

hagamos:

Calculamos los nuevos límites y sustituimos:

Integramos:

La solución, por tanto es:

**4.3. Aplicación del cálculo integral a la física**

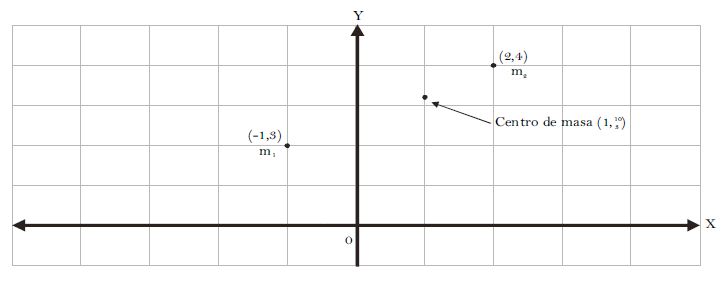
Determinación del momento y centro de masa de un cuerpo.

**Investiga:**

1. ¿A qué se le llama .centro de masa. de un cuerpo?
2. ¿Qué son los .momentos. de la masa de un cuerpo?
3. Escribe la ecuación para determinar el centro de masa y su explicación.
4. Para un sistema de varias dimensiones ¿cómo se define el .centro de masa.?
5. ¿Qué es un .centroide?
6. Escribe las ecuaciones para determinar las coordenadas del centroide de un cuerpo.
7. Si el cuerpo es simétrico, de acuerdo al principio de simetría, ¿dónde se ubica el centroide?
8. Después de revisar con atención los ejemplos resueltos anota en forma de lista los pasos para ubicar las coordenadas del centroide.

**Ejemplo 1.** Calcula los momentos Mx y My y encuentra el centro de masa del sistema.

Elaboremos un diagrama que nos ayude a entender mejor el problema:



Aplicando las fórmulas:

Tenemos:

Dado que la masa total del sistema (m) es: tenemos que las coordenadas del centro de masa son:

**4.4. Determinación del trabajo físico realizado por una fuerza**

Contesta las siguientes preguntas:

1. En el ámbito de la Física, ¿cómo se define al trabajo?
2. ¿Cuál es la fórmula para calcular el trabajo cuando la fuerza aplicada es constante?
3. ¿Por qué razón se expresa la aceleración como ? ¿De qué manera se relaciona el desplazamiento (s) con la aceleración a través de esta expresión matemática?
4. ¿Cuál fórmula se emplea para calcular el trabajo cuando la fuerza aplicada es variable?
5. En la fórmula anterior, ¿cómo se expresa la distancia?, ¿a qué equivale dentro de la integral?

Intenta resolver los siguientes ejercicios para comprobar tu grado de dominio sobre los contenidos que se manejan en la presente Unidad. Recuerda que en caso de tener dudas o muchas dificultades, conviene regresar sobre el texto y consultar a tu Asesor.

Determina el volumen del sólido generado, haciendo girar sobre el eje de las x la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos:

Trabajo

Una fuerza de 8 N estira un resorte de su longitud natural de 4 m a una longitud adicional de 50 cm. Determina el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural hasta una longitud de 5 m.